Проблемы физики, математики и техники, № 4 (33), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ *A*-ДОПУСТИМЫХ Θ-ПОДГРУПП, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ПОДГРУППУ ФИТТИНГА

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON INTERSECTION OF *A*-ADMISSIBLE Θ-SUBGROUPS THAT DO NOT CONTAIN FITTING SUBGROUP

R.V. Borodich, E.N. Borodich, M.V. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер ненильпотентных максимальных *A*-допустимых Θ-подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга. Установлено влияние соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини на строение самой группы.

Ключевые слова*: конечная группа*, *абнормальная подгруппа*, *подгруппа Фиттинга.*

The structure of a subgroup equal to the intersection of kernels non-nilpotent maximal *A*-admissible Θ-subgroups that do not contain Fitting subgroup is considered. The influence of the corresponding generalized Frattini subgroup on the structure of the group itself was found.

Keywords: *finite group*, *abnormal subgroup*, *Fitting subgroup*.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Одно из направлений теории пересечений максимальных подгрупп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Данное направление берет начало с работы Фраттини [1], установившего нильпотентность пересечения $\Phi(G)$ всех максимальных подгрупп конечной группы *G*. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографии [2] и [3]).

В настоящее время одно из направлений развития данной теории связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не содержащих некоторую нормальную подгруппу конечной группы [4].

Данная работа посвящена разитию указанного направления в группах с операторами.

1 Определения и обозначения

Через M_G обозначают ядро подгруппы *M* в группе *G* (то есть пересечение всех подгрупп из *G*, сопряженных с подгруппой *M*).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой *G* и все группы, изоморфные *G*.

Пусть даны группа *G*, множество *A* и отображение $f: A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы *G* в себя или эндоморфизм группы *G*. Подгруппа *M* называется *A*-допустимой, если *M* выдерживает действие всех операторов из *A*, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является *A*-допустимой для произвольной группы операторов.

Пусть $\mathfrak{X}$ произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [5] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

В дальнейшем для каждой группы G будем фиксировать некоторую ее группу операторов. Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Введем следующие обозначения:

$\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}}}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq F(G),\ M \notin \mathfrak{N},\ M \in \theta(G),$ M – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq F(G),\ M \in \theta(G),$ M – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Phi_{\theta_F}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \supseteq F(G),\ M \in \theta(G),$ M – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

$\Phi_\theta(G, A) = \cap\{M_G \mid M \in \theta(G),$ M – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

В случае, когда θ тривиальный функтор, то подгруппа $\Phi_\theta(G, A)$ совпадает с подгруппой $\Phi(G, A)$, некоторые свойства которой были описаны Л.Я. Поляковым в [6]. Если функтор θ абнормальный, то подгруппу $\Phi_\theta(G, A)$ будем обозначать $\Delta(G, A)$ (операторный аналог подгруппы Гашюца $\Delta(G)$, введенной в [2]). Напомним, что подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют подгруппу, равную пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп группы G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

2 Вспомогательные результаты

***Лемма* 2.1** [6, с. 64]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|, |A|) = 1$. *Если G обладает свойством C_π, то G содержит A-допустимую S_π -подгруппу.*

***Лемма* 2.2** [7, с. 26]. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Если K – A-допустимая подгруппа группы G, то $N_G(K)$ является A-допустимой подгруппой группы G.*

***Лемма* 2.3** [2, с. 179]. *Если подгруппа H пронормальна в G, то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G.*

***Лемма* 2.4.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|, |A|) = 1$, *Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа $\Phi_\theta(G, A)$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(\Phi_\theta(G, A))$. По лемме 2.1 в $\Phi_\theta(G, A)$ существует A-допустимая p-силовская подгруппа P. По лемме Фраттини

$$G = N_G(P)\Phi_\theta(G, A).$$

По лемме 2.2 подгруппа $N_G(P)$ A-допустима. Если $N_G(P) = G$, то P нормальна в G, а значит, нормальна и в $\Phi_\theta(G, A)$. Пусть $N_G(P) \neq G$, тогда по лемме 2.3 $N_G(P)$ является абнормальной подгруппой. Следовательно, $N_G(P)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой Θ-подгруппе M. Из леммы Фраттини и определения $\Phi_\theta(G, A)$ следует, что $\Phi_\theta(G, A) \subseteq M$, а значит, $M = G$. Получили противоречие с предположением. Итак, любая силовская подгруппа из $\Phi_\theta(G, A)$ нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа $\Phi_\theta(G, A)$ нильпотентна. □

***Лемма* 2.5.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|, |A|) = 1$, *Θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, N и K – A-допустимые подгруппы группы G и $K \subseteq \Phi_\theta(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $F_p(N / K) = F_p(N) / K$;

2) $F(N / K) = F(N) / K$.

Доказательство. Пусть N / K имеет нормальную p-подгруппу H / K. Так как $K \subseteq \Phi_\theta(G, A)$, то по лемме 2.4 K нильпотентна. Нетрудно заметить, что p' -подгруппа R из K является p' -подгруппой в H. По теореме Силова H содержит p-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем, $G = N_G(S)R$. Так как S есть p-подгруппа в N, а подгруппа N A-допустима, то S A-допустима. Тогда по лемме 2.2 подгруппа $N_G(S)$ A-допустима и по лемме 2.3 является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой максимальной A-допустимой Θ-подгруппе M из G. Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Phi_\theta(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G. □

***Лемма* 2.6.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, Θ *– абнормально полный подгрупповой функтор и* $\Phi_\theta(G,A)\neq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi_\theta(G,A)\subseteq F(G)$;

2) *если G – разрешимая неединичная группа, то* $\Phi_\theta(G,A)\subset F(G)$.

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что $\Phi_\theta(G,A)$ является нильпотентной подгруппой. Следовательно, $\Phi_\theta(G,A)\subseteq F(G)$. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда $G/\Phi_\theta(G,A)$ разрешима и неединична. Пусть $B/\Phi_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi_\theta(G,A)$. Так как $B/\Phi_\theta(G,A)$ – p-группа для некоторого простого p, то по лемме 2.5 B является нильпотентной, а это значит, что $B\subseteq F(G)$. Следовательно, $\Phi_\theta(G,A)\subset F(G)$. □

3 Основные результаты

***Теорема* 3.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, Θ *– абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной неразрешимой группе существуют ненильпотентные A-допустимые* Θ*-подгруппы, причем пересечение ядер всех таких подгрупп нильпотентно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Так как G не p-разрешима, то $K=G^{\mathfrak{F}}\notin\mathfrak{F}$. Можно считать, что $O_p(G)=1$. Пусть P – силовская p-подгруппа из K. По теореме Томпсона в P найдётся такая характеристическая, а, следовательно, A-допустимая подгруппа $R\neq 1$, что $N_K(R)\notin\mathfrak{F}$. Так как R – A-допустимая подгруппа, то по лемме 2.2 $N_G(R)$ – A-допустимая подгруппа. Далее $N_K(R)\subseteq N_G(R)$, а значит $N_G(R)\notin\mathfrak{F}$. В силу того, что $O_p(G)=1$, получаем $N_G(P)\neq G$. По лемме 2.3 $N_G(P)$ – абнормальная подгруппа. Из того, что $N_G(P)\subseteq$ $\subseteq N_G(R)$, имеем $N_G(R)$ – абнормальная подгруппа. Так как любая подгруппа, содержащая $N_G(R)$ является абнормальной и ненильпотентной, то в качестве ненильпотентной максимальной A-допустимой Θ-подгруппы выберем наибольшую A-допустимую Θ-подгруппу содержащую $N_G(R)$.

Пусть D – пересечение ядер ненильпотентных A-допустимых Θ-подгрупп. Предположим, что $D\subset\Phi_\theta(G,A)$. Тогда существует нильпотентная A-допустимая Θ-подгруппа M, не содержащая D. Тогда $G=DM$. Отсюда следует, что $G/D\simeq M/M\cap D$ является нильпотентной, в частности, разрешимой группой.

Пусть P – силовская A-допустимая p-подгруппа из D. По лемме Фраттини $G=DN_G(P)$. Если $N_G(P)=G$, то $P\triangleleft G$. Отсюда и из разрешимости G/D следует разрешимость группы G. Получили противоречие.

Будем считать, что $N_G(P)\neq G$. Пусть R – максимальная A-допустимая подгруппа группы G такая, что $N_G(P)\subseteq R$. Из абнормальности $N_G(P)$ следует, что $R\in\Theta(G)$. Так как $G=DR$, то R нильпотентна. Следовательно, $N_G(P)$ – нильпотентная группа.

Если D нильпотентна, то нетрудно видеть, что группа G разрешима. Противоречие.

Будем считать, что D ненильпотентна. Тогда найдётся силовская p-подгруппа P^* не инвариантная в G. По обобщенной лемме Фраттини $G=DN_G(P^*)$.

Возможны случаи $N_G(P^*)=G$, либо $N_G(P^*)$ нильпотентна. Второй случай невозможен. Остаётся принять, что $P^*\triangleleft G$. Противоречие. Следовательно $D=\Phi_\theta(G,A)\in N$. □

***Теорема* 3.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, Θ *– абнормально полный подгрупповой функтор, тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *в разрешимой неединичной группе выполняется равенство* $\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)=\Phi_\theta(G,A)$;

2) *в разрешимой ненильпотентной группе подгруппа* $\Phi_{\theta_F}(G,A)\in\mathfrak{N}^2$.

Доказательство. Подгруппы $\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)$ и $\Phi_{\theta_F}(G,A)$ являются характеристическими в G и

$$\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)\cap\Phi_{\theta_F}(G,A)=\Phi_\theta(G,A).$$

Для факторгруппы $G/\Phi_\theta(G,A)$ выполняется

$$F(G/\Phi_\theta(G,A))=F(G)/\Phi_\theta(G,A).$$

Поэтому

$$\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G/\Phi_\theta(G,A))=\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A).$$

Предположим, что $\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)\neq 1$ и пусть $K/\Phi_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi_\theta(G,A)$, содержащаяся в $\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$. Так как $K/\Phi_\theta(G,A)$ нильпотентна, то по лемме 2.5 K является нильпотентной подгруппой. Следовательно, $K\subseteq F(G)$. Тогда

$$K\subseteq\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)\cap\Phi_{\theta_F}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)=1$, а, значит,

$$\Phi_{\theta_{\overline{F}}}(G,A)=\Phi_\theta(G,A).$$

Пусть G – разрешимая ненильпотентная группа. Из того, что $F(G)\subseteq\Phi_{\theta_F}(G,A)F(G)$ и

$$\Phi_{\theta_F}(G,A)/F(G)=\Phi_\theta(G/F(G),A),$$

следует, что подгруппа $\Phi_{\theta_F}(G,A)\in\mathfrak{N}^2$. □

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, Θ *– абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в разрешимой неединичной группе подгруппа* $\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)$ *нильпотентна.*

Если группа операторов A является тривиальной, то имеет место следующее

***Следствие* 3.2.2.** *Пусть* Θ *– абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *в разрешимой неединичной группе выполняется равенство* $\Phi_{\theta_{\bar F}}(G)=\Phi_\theta(G)\in\mathfrak{N}$;

2) *в разрешимой ненильпотентной группе подгруппа* $\Phi_{\theta_F}(G)\in\mathfrak{N}^2$.

Если Θ подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе все её подгруппы, то получаем

***Следствие* 3.2.3.** *Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $G\neq 1$, *то* $\Phi^p_{\bar F}(G)=\Phi^p(G)\in\mathfrak{N}$;

2) *в любой не p-нильпотентной группе G подгруппа* $\Phi^p_F(G)\in\mathfrak{N}^2$.

***Теорема* 3.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, Θ *– абнормально полный подгрупповой функтор, G – разрешимая группа. Если* $\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)\neq G$, *то*

$$\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)=\Phi_\theta(G,A).$$

Доказательство. Пусть G обладает ненильпотентными максимальными A-допустимыми Θ-подгруппами, не содержащими $F(G)$. Не сложно заметить, что

$$\Phi_\theta(G,A)\subseteq\bar\Phi_\theta(G,A)\subseteq\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)$$

и согласно доказательству теоремы 3.1

$$\Phi_\theta(G)=\bar\Phi_\theta(G,A).$$

Пусть подгруппа $\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)$ не совпадает с подгруппой $\bar\Phi_\theta(G,A)$, тогда

$$\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)/\bar\Phi_\theta(G,A)\neq 1$$

и пусть $K/\bar\Phi_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\bar\Phi_\theta(G,A)$, содержащаяся в $\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)/\bar\Phi_\theta(G,A)$. Так как $K/\bar\Phi_\theta(G,A)$ нильпотентна, то из леммы 2.5 следует, что K p-нильпотентная подгруппа. Следовательно, $K\subseteq F(G)$. Тогда

$$K\subseteq\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)\cap\bar\Phi_{\theta_F}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)/\bar\Phi_\theta(G,A)=1$, а, значит, $\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)=\Phi_\theta(G,A)$. □

Применяя результат работы [5] и теорему 3.1, получаем следующее

***Следствие* 3.3.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, Θ *– абнормально полный подгрупповой функтор, G – разрешимая группа. Если* $\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)\neq G$, *то* $\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G,A)$ *– нильпотентная подгруппа группы G.*

В случае, когда группа операторов A является тривиальной, то из теоремы 3.3 получаем

***Следствие* 3.3.2.** *Пусть G – разрешимая группа. Если* $\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G)\neq G$, *то*

$$\bar\Phi_{\theta_{\bar F}}(G)=\Phi_\theta(G)\in N.$$

Если функтор Θ выделяет только абнормальные подгруппы, то из теоремы 3.3 получаем

***Следствие* 3.3.3.** *Пусть G – разрешимая группа. Если в группе G существуют ненильпотентные абнормальные максимальные подгруппы, не содержащие* $F(G)$, *то пересечение всех таких подгрупп совпадает с* $\Delta(G)$.

Если функтор Θ выделяет в каждой группе все её подгруппы, то получаем

***Следствие* 3.3.4.** *Пусть G – разрешимая группа. Если в группе G существуют ненильпотентные максимальные подгруппы, не содержащие* $F(G)$, *то пересечение всех таких подгрупп совпадает с* $\Phi(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini*, *G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

3. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. *Монахов*, *В.С.* Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

5. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

6. *Поляков*, *Л.Я.* О конечных группах с заданной группой операторов / Л.Я. Поляков // Вопросы алгебры. – Мн.: Университетское. – 1987. – Вып. 3. – С. 63–67.

7. *Gorenshtein*, *D.* Finite groups / D. Gorenshtein. – New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.

Поступила в редакцию 08.06.17.